Análisis Estadístico de Datos Climáticos

Revisión de probabilidad y aplicaciones

(Wilks, Cap. 2)

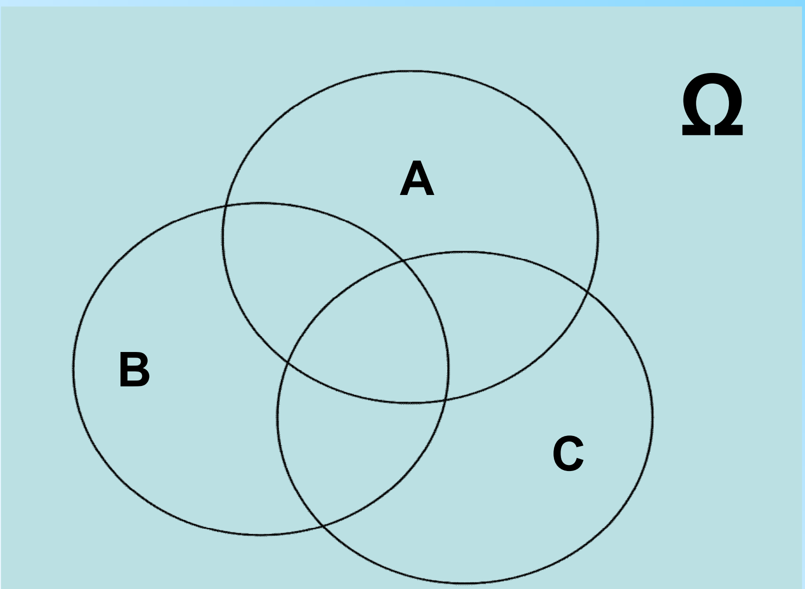
2015

Revisión de conceptos sobre probabilidad

- Utilizamos las probabilidades para **cuantificar la incertidumbre**
- Eventos o sucesos, espacio muestral Ω, partición de Ω

(Ej: un evento es: A={“mañana llueve más de 5 mm en Florida”})

Diagramas de Venn;
(A, B y C son eventos o sucesos)



Axiomas de probabilidad

1) $P(A) \geq 0$ si $A \in \Omega$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Si $A_1, A_2, \ldots . A_n$ son disjuntos (o mutuamente excluyentes) dos a dos, $\Rightarrow$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots . \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

(U significa "unión")

Interpretaciones de la probabilidad

1) Interpretación "frecuencista"

Frecuencia = "Casos favorables" / "Casos posibles"

Ley de los grandes números

$$\Pr\left\{\left|\frac{a}{n} - \Pr\{E\}\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty,$$

(Ley "débil")

Establece que la razón del número de ocurrencias de un evento (E) respecto al número de posibilidades de ocurrir converge a la probabilidad de E cuando el número de posibilidades se incrementa (**a** es el numero de ocurrencias, **n** es el número de posibilidades).

Es el fundamento para **estimar** probabilidades a partir de las frecuencias.

2) Interpretación "bayesiana" (subjetiva, que debe cumplir con los axiomas)

Algunas propiedades:

$0 \leq P(A) \leq 1$

$$\text{Si } A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$P(A^c) = 1 - P(A)$ (c significa complemento)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

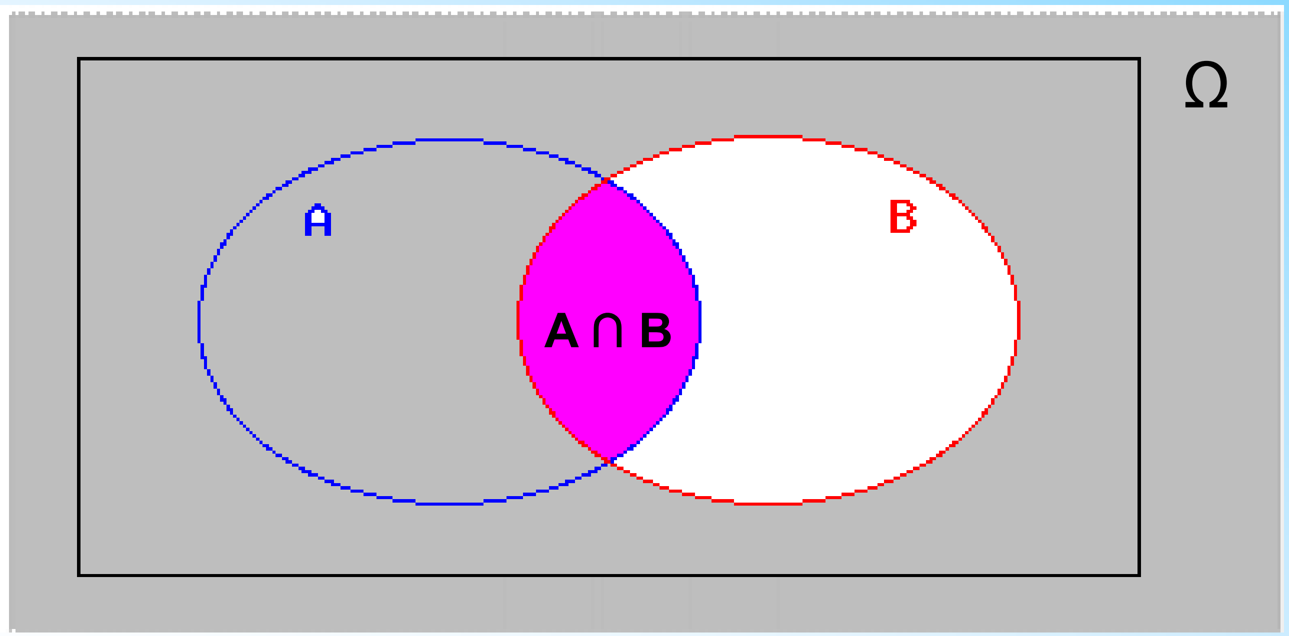
$\cap$ significa "intersección"

Probabilidad condicional

Es un concepto especialmente importante porque en el clima hay muchas variables interaccionando.

Es la probabilidad de que ocurra un suceso A, dada la ocurrencia de otro suceso B, de probabilidad no nula.

Def: $P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$ siendo $P(B) \neq 0$



Ejemplos

1) P(llueva mañana | hoy llovió)

2) P(TSM promedio en el Pacífico ecuatorial sea > 27,5 ºC mañana | hoy es > 28 ºC)

3) P(ocurra un evento meteorológico | fue pronosticado)

4) P(en Uruguay llueva por encima del promedio en noviembre | en setiembre la TSM en el Pacífico ecuatorial está 1ºC por encima del promedio)

No confundir relaciones estadísticas con relaciones causa-efecto!!

DATOS ESTACIÓN METEOROLÓGICA CARRASCO
Humedad Relativa y Precipitación
Diciembre 1997

DIA	HR (%)	PP (mm)
1	71	0
2	54	0
3	61	23.88
4	52	0
5	70	0
6	67	0
7	85	23.11
8	65	0
9	81	0
10	91	3.05
11	89	2.03
12	98	0
13	97	8.89
14	82	27.94
15	72	7.11
16	65	0

DIA	HR (%)	PP (mm)
17	70	0
18	75	0
19	92	0
20	86	0
21	74	0
22	89	13.97
23	88	84.07
24	81	0
25	80	0
26	94	5.08
27	77	29.97
28	67	0
29	81	0
30	73	1.02
31	63	0

Calcular:

a) $P(PP > 1 \text{ mm.})$

b) $P(PP > 1 \text{ mm. mañana} \mid PP > 1 \text{ mm. hoy})$

c) $P(HR > 75\%)$

d) $P(PP > 1 \text{ mm.} \mid HR > 75\%)$

e) $P(PP > 1 \text{ mm.} \mid HR <= 75\%)$

Independencia

- Concepto: Dos sucesos E_1 y E_2 son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro.

Independencia ↔ **P(E1|E2)=P(E1) ó P(E2|E1)=P(E2)**

ó también $\mathbf{P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P(E_2)}$

Ej: 1) fenómenos naturales (p. ej. a) y d) de diapositiva anterior)

2) pronósticos

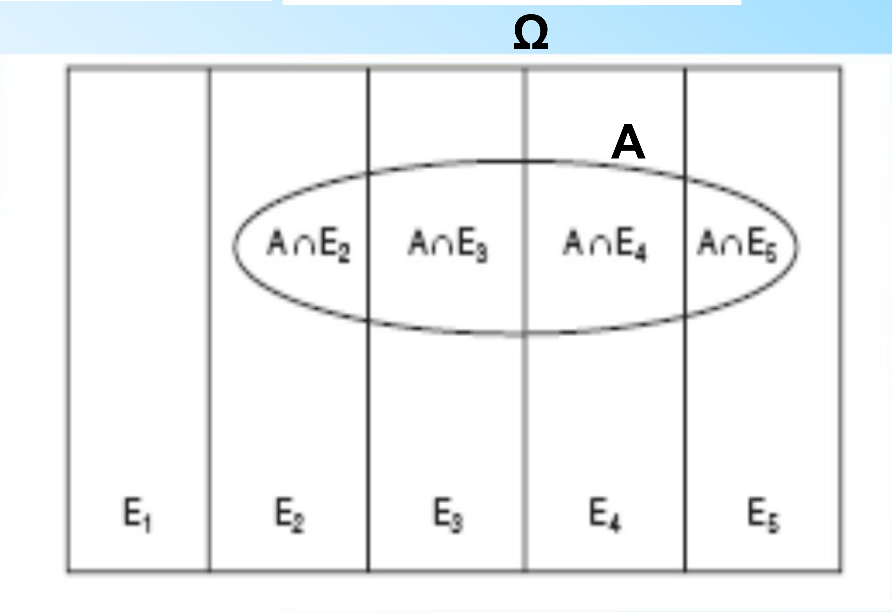
Aplicación: Persistencia (o “memoria”)

- Es la existencia de dependencia estadística positiva entre valores sucesivos de una misma variable.
- La persistencia se da en diferentes escalas, dependiendo del fenómeno que se trate. Ejemplo: TSM y presión atmosférica o lluvia.
- Está asociada a la probabilidad condicional, y tiene consecuencias estadísticas.

Ley de probabilidad total

Si los eventos E_i forman una partición de Ω:

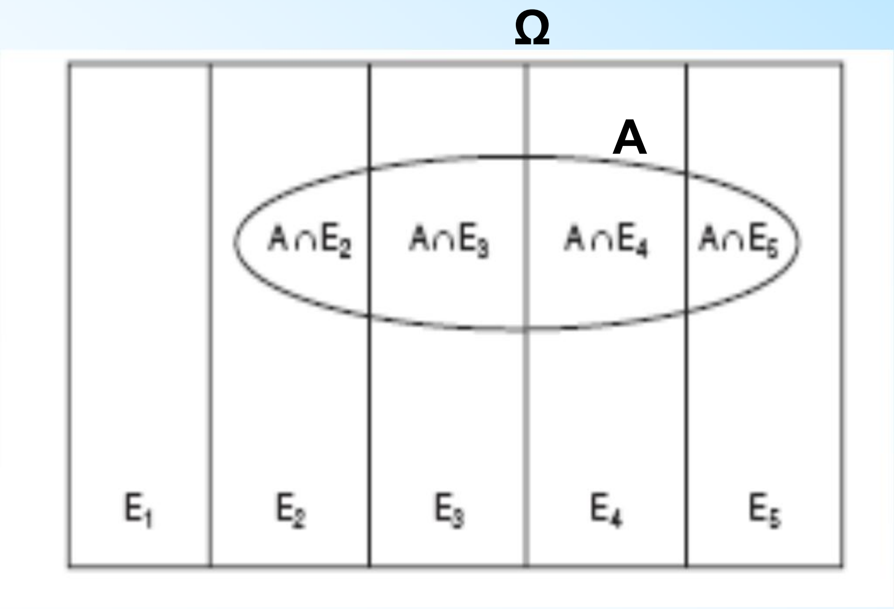
$$P(A)=\sum_{i=1}^{I}P(A\cap E_i)=\sum_{i=1}^{I}P(A\mid E_i)P(E_i)$$



Teorema de Bayes

Utiliza varios de los resultados anteriores y sirve para “invertir” probabilidades condicionales. Es decir, si conocemos P(A/E1) el teorema de Bayes puede ser usado para estimar P(E1/A).

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid E_i)P(E_i)}{\sum_{j=1}^{I} P(A \mid E_j)P(E_j)}$$



Ejercicio:

Calcular:

$P(HR>75\ \% \mid PP> 1\ mm)$,

usando Bayes y los resultados anteriores.

Verificar por cálculo directo.