

3. Ecuaciones de conservación

En el capítulo anterior vimos que el océano está forzado a través de flujos de calor, momento y agua (además de la atracción gravitatoria del sol y la luna) por lo que el océano nunca está en reposo y está en continuo movimiento. Este movimiento transporta las propiedades del fluido y a diferentes trazadores en todas las escalas espaciales. La transferencia puede ser tranquila (en un flujo laminar) o muy irregular (en flujo turbulento). La dispersión de los trazadores dependerá de cómo sean llevados por el flujo, se difundan y eventualmente se diluyan.

Para describir cuantitativamente las corrientes oceánicas y la forma en que transportan propiedades y trazadores es necesario formular matemáticamente las ecuaciones que gobiernan el movimiento y que son los balances de momento, de masa, de energía y de sal. Estas son las ecuaciones de física clásica que describen el flujo de un fluido rotante y estratificado sobre una esfera y forman un sistema de 7 ecuaciones para las variables \mathbf{u} , T , S , ρ , p .

3.1 Ecuaciones de conservación de masa y sal

La conservación de la masa de un fluido en su movimiento está dado por la ecuación de continuidad. El flujo de masa que entra y que sale de un elemento de volumen puede escribirse como

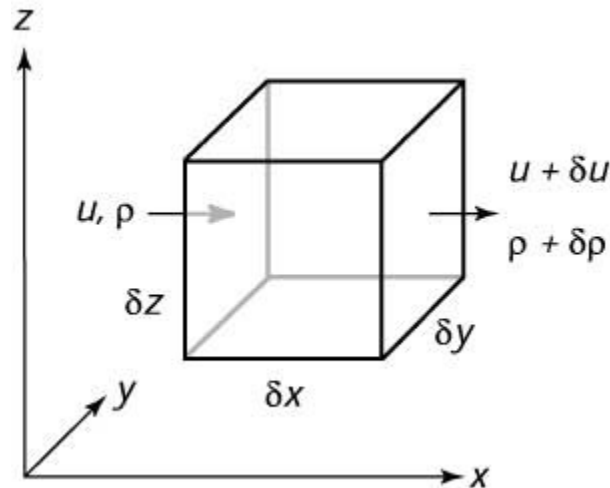


Figura 3.1- Balance de masa de un elemento de volumen.

Recordemos que la definición de flujo de masa es $M = \int \int \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dA$ donde \mathbf{u} es la velocidad y \mathbf{n} es un versor que indica la dirección normal a la superficie. Entonces, si el flujo en la dirección x es perpendicular al lado del cubo y puede considerarse constante en $\delta y \delta z$ podemos escribir

Flujo de masa que entra $\rho u \delta z \delta y$

Flujo de masa que sale $(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} \delta x)(u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x) \delta z \delta y$ donde se asumió que la densidad y la velocidad varían continuamente a través del cubo.

El flujo de masa neto (sale-entra) es entonces

$$\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \delta x + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \delta x \delta z \delta y \quad (3.1)$$

Cuando $\delta x \rightarrow 0$, el segundo término es despreciable comparado con los otros dos y obtenemos

$$\left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}\right) \delta x \delta z \delta y = \frac{\partial \rho u}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \quad (3.2)$$

En tres dimensiones

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) \delta x \delta y \delta z \quad (3.3)$$

El flujo de masa debe estar balanceado por el cambio de masa en el elemento de volumen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (3.4)$$

y por lo tanto la ecuación de conservación de masa queda

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Esta ecuación fue derivada por primera vez por L. Euler (1707-1783).

La derivación para la conservación de la sal es similar a la de la conservación de la masa. Como la salinidad no tiene dimensiones el producto ($S\rho$) tiene unidades de masa por unidad de volumen. Entonces, podemos escribir la ecuación de conservación de sal en el océano como

$$\frac{\partial S\rho}{\partial t} + \frac{\partial S\rho u}{\partial x} + \frac{\partial S\rho v}{\partial y} + \frac{\partial S\rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

En una primera aproximación es posible considerar un océano de densidad uniforme, incompresible. En tal caso las ecuaciones para la conservación de sal y masa quedan de la forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} + \frac{\partial Sv}{\partial y} + \frac{\partial Sw}{\partial z} = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

Explícita en la derivación de las ecuaciones de conservación para la masa y la sal está la idea de que los cambios en salinidad y densidad dentro del volumen se deben solamente al flujo que entra y sale, o sea a la advección. Estas propiedades se denominan conservativas y ecuaciones similares pueden escribirse para otras propiedades conservativas. Propiedades no conservativas son aquellas cuyo valor puede cambiar independientemente del flujo (es decir existen fuentes y/o sumideros), como por ejemplo materiales radiativos, oxígeno disuelto y nutrientes.

Muchas veces es posible considerar que el flujo es bidimensional y en el plano horizontal. Esto ocurre porque la densidad aumenta con la profundidad por lo que una parcela de fluido desplazada en la vertical sufrirá una fuerza de empuje que la devolverá a su posición original. Así las velocidades verticales están mucho más restringidas que las horizontales y serán mucho menores. Hay excepciones importantes de mencionar en donde no se puede despreciar la estructura tridimensional del flujo. Una son las regiones de producción de aguas profundas. Otro caso es cuando existe una línea de convergencia de aguas de diferentes características, o sea un frente. Por ejemplo, en los estuarios el agua menos salina se puede extender sobre aguas más salinas del océano las cuales tenderán a hundirse bajo las aguas estuarinas a lo largo de un frente (Figura 3.2).

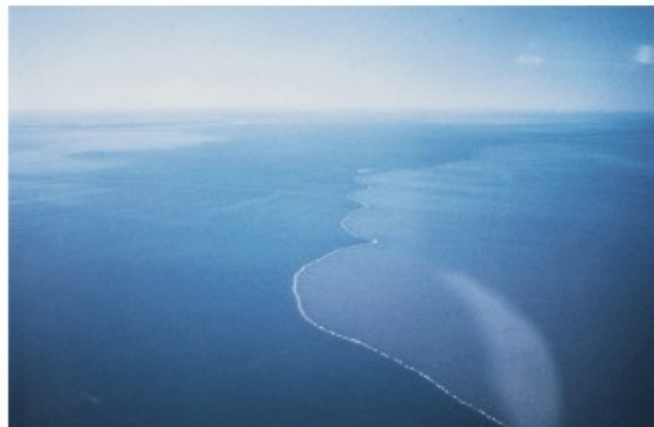


Figura 3.2 – Convergencia frontal en un estuario con aguas salinas a la izquierda. La convergencia aparece como una línea blanca donde existe gran acumulación de espuma.

3.2 Mezcla, turbulencia y difusión

Además de a través de la advección, el calor y la sal son transportados por los procesos moleculares. Las moléculas dentro del fluido están en continuo movimiento e interactúan entre ellas. Por ello, aún cuando el fluido esté en reposo las moléculas no lo están y pueden transferir propiedades a escala molecular. El flujo molecular de sal y de calor es proporcional al gradiente de la propiedad: a mayor gradiente, más rápida es la transferencia. Las constantes de proporcionalidad han sido medidas para un gran número de fluidos y se conocen relativamente bien. Para el agua de mar se tiene

$$\begin{aligned} F_s &= -\rho \kappa_s \frac{\partial S}{\partial n} \\ Q &= -\rho c_p \kappa_Q \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde n es normal a las líneas de salinidad y temperatura constante, $\kappa_s = 1.5 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ y $\kappa_Q = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

De los valores de κ está claro que la difusión de sal y calor en el océano es pequeña, mucho menor que la observada en el océano. ¿Cuál es el proceso que aumenta la mezcla observada? Por ejemplo, el rompimiento de olas en superficie y en el interior de la columna, el viento soplando en la superficie o corrientes fluyendo sobre topografía irregular. Todos estos procesos que aumentan la mezcla más allá del realizado por los procesos moleculares se categorizan como *turbulencia*, la cual se podría definir como un flujo irregular que muestra variabilidad aleatoria en el espacio y el tiempo.

En una primera aproximación es posible asimilar el movimiento turbulento de los remolinos que caracterizan la turbulencia al movimiento molecular. Es decir, se asume que el movimiento de los remolinos es análogo al camino libre medio de las moléculas. De esta forma es posible escribir ecuaciones análogas a la *difusión molecular* (3.7) para la *difusión turbulenta*, reemplazando las constantes de proporcionalidad. Los remolinos turbulentos pueden tener escalas espaciales de cm a decenas de km, por lo que se espera un rango grande de coeficientes difusivos turbulentos. Estos son del orden

$$\begin{aligned} \kappa_E &= 10^{-4} - 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s} \\ A &= 10^{-1} - 10^3 \text{ m}^2/\text{s} \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde κ_E , A son los coeficientes en las direcciones vertical y horizontal, respectivamente. Puesto que el océano está estratificado es necesario mucho más trabajo para mover parcelas de agua a través de isopícnals que a lo largo de ellas. Por lo tanto, la turbulencia vertical (mezcla diapícnica) es mucho menor que la horizontal. No obstante, la *mezcla diapícnica* es muy importante porque cambia la estructura vertical del océano y controla la velocidad a la cual aguas profundas emergen

en latitudes medias y bajas. Puesto que la turbulencia controla tanto la difusión turbulenta de calor como la de sal se usa el mismo valor para ambos casos. Esto contrasta con los valores moleculares que difieren en dos órdenes de magnitud.

Incluyendo el término difusivo en la ecuación de conservación de la sal, para el caso de densidad constante, se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Su}{\partial x} + \frac{\partial Sv}{\partial y} + \frac{\partial Sw}{\partial z} = A \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3.11)$$

la cual puede ser escrita como

$$\frac{dS}{dt} = A \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3.12)$$

donde se usó la ecuación (3.8) y

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (3.13)$$

Esta última ecuación merece una interpretación detallada. Para eso consideremos la figura 3.2 donde una parcela de fluido con velocidad \mathbf{u} se desplaza en el océano a través de una región con variación de salinidad dada por el gradiente ∇S . En un tiempo δt el desplazamiento de la parcela en la dirección x será $(u\delta t)$ lo cual resultará en un cambio de salinidad dado por $u\delta t \frac{\partial S}{\partial x}$.

Sumando las contribuciones análogas para el movimiento en las direcciones y, z , el cambio total de salinidad δS siguiendo la parcela es

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial t} \delta t + \frac{\partial S}{\partial x} u \delta t + \frac{\partial S}{\partial y} v \delta t + \frac{\partial S}{\partial z} w \delta t \quad (3.14)$$

Dividiendo entre δt y tomando $\delta t \rightarrow 0$, la razón de cambio total de salinidad estará dado por

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} \quad (3.15)$$

La derivada a la izquierda se llama *derivada total o material* e indica el cambio de salinidad siguiendo el movimiento de la parcela. Este cambio está dado por el cambio local que ocurre aún en ausencia de movimiento de la parcela (1^{er} término a la derecha) y por la advección (transporte) de salinidad por el movimiento del fluido. Este último procesos está representado por los tres términos no lineales a la derecha de la ecuación y son no nulos si existe un flujo y un ∇S . La no linealidad de los términos aparece pues así como la distribución de salinidad depende de las

corrientes, las corrientes mismas dependen de la distribución de sal en el océano. Si la distribución de salinidad se puede considerar constante (no influenciada por el flujo) los términos pasan a ser lineales.

Entonces, la ecuación (3.12) se puede escribir como

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u \frac{\partial S}{\partial x} - v \frac{\partial S}{\partial y} - w \frac{\partial S}{\partial z} + A \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3.16)$$

la cual se conoce como **ecuación de advección-difusión** ya que la evolución local de la salinidad está dada por procesos advectivos y difusivos. Esta ecuación describe el transporte y dispersión de cualquier propiedad escalar pasiva, no sólo salinidad, del fluido.

La salinidad y la temperatura potencial son trazadores usados comunmente para identificar el movimiento de las aguas en el océano ya que no tienen fuentes o sumideros interiores. Esas masas de agua se dispersan de sus regiones de formación por la advección tridimensional y la difusión.

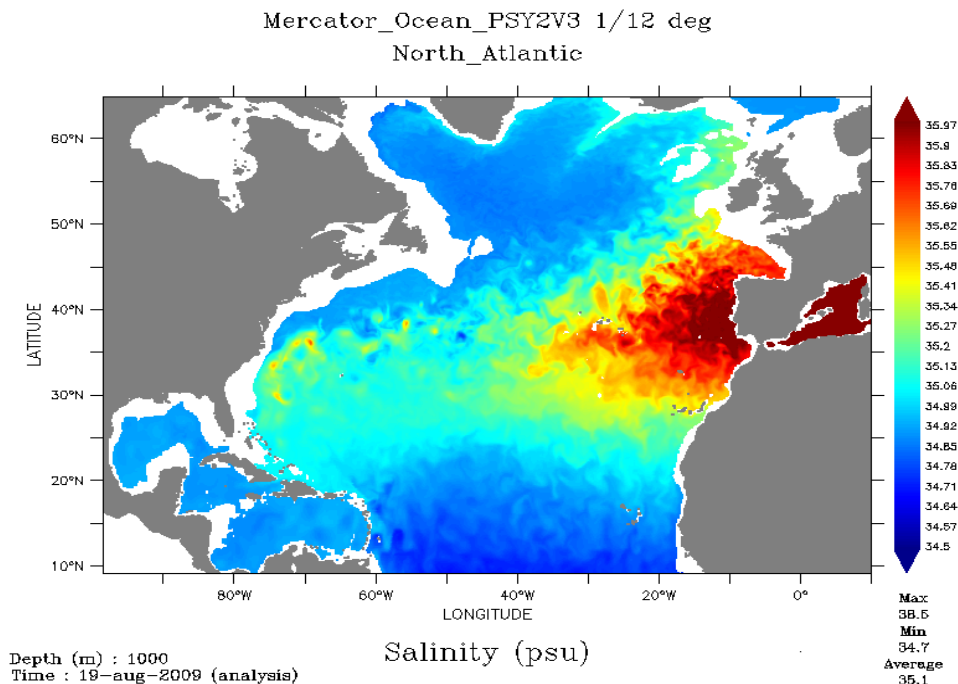


Figura 3.3 – Salinidad del Atlántico norte a 1000 m de profundidad mostrando la dispersión de las aguas del Mediterráneo.

La figura 3.3 muestra como ejemplo la dispersión de aguas salinas y cálidas del Mediterráneo en el Atlántico norte a profundidades medias. Las aguas son transportadas hacia el norte por una corriente local y hacia el oeste por la circulación asociada al giro. El agua es también transportada

por remolinos de subsuperficie (llamados Meddies) hacia el oeste. A medida que el agua se aleja de la fuente se diluye gradualmente a través de los procesos de mezcla y de difusión.

3.3 Ecuación de conservación de energía

La ecuación de conservación de energía gobierna la evolución de la temperatura del fluido. Consideremos la 1a ley de la termodinámica:

$$\frac{d e}{d t}=Q-W \quad (3.17)$$

donde e es la energía interna, Q el flujo de calor, y W el trabajo realizado sobre el entorno por la presión. La energía interna es proporcional a la temperatura $e=c_v T$, donde $c_v=3990$ J/kg/K es el calor específico a volumen constante.

En el interior oceánico el único flujo de calor que entra a una parcela de fluido es el debido a la difusión de calor. Considerando el agua como incompresible es posible despreciar el término de trabajo W . Por lo tanto, la ecuación para la temperatura es la ecuación de difusión de calor con coeficientes turbulentos

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = A \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.18)$$

3.4 Dedos de sal

Junto con la ecuación de conservación de sal, la ecuación de energía determina la evolución de la densidad. Los coeficientes de difusión de temperatura y de sal a nivel molecular son diferentes (la difusión de calor es 100 veces mayor) y esta diferencia es responsable de los “dedos de sal” (doble-difusión). Esta inestabilidad fue descubierta por Melvin Stern en 1960 quien rápidamente vió su aplicación en oceanografía.

Consideremos dos capas de agua de unos metros de espesor separados por una interface (Figura 3.4). Si la capa superior es cálida y con alta salinidad, y la capa inferior es fría y más diluida que la capa superior, la interface se vuelve inestable aún si la capa superior es menos densa que la inferior.

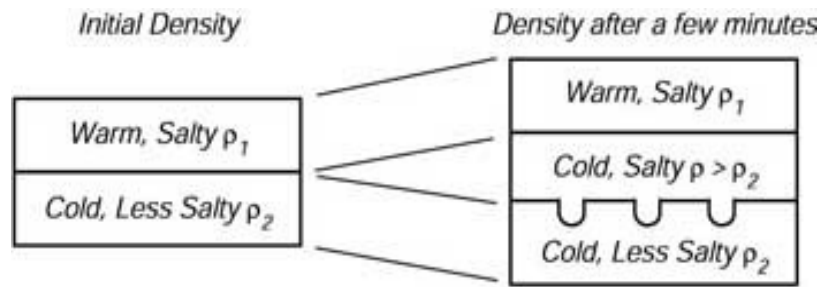


Figura 3.4 – Disposición inicial y final de un par de capas que muestra el proceso de formación de dedos de sal.

El proceso es el siguiente. El calor se difunde a través de la interface 100 veces más rápido que la sal dando lugar a una capa intermedia. Esta capa intermedia es fría y salada, siendo más densa que la capa inferior fría pero menos salada, por lo que el agua tiende a descender. Como la capa es fina, el fluido desciende en dedos de 1-5 cm de diámetro y de unos diez centímetros de largo. Puesto que tanto calor como sal se difunden a través de la interface, el proceso se denomina de doble-difusión.

Este proceso ocurre en las aguas centrales de los giros subtropicales, en la región tropical oeste del Atlántico Norte, y en el noreste del Atlántico por debajo del flujo que sale del Mediterraneo (Figura 3.5). La formación de dedos de sal da lugar a un aumento de la densidad con la profundidad. Capas de densidad constante quedan separadas por capas finas donde el gradiente de densidad es muy grande, y el perfil de densidad como función de la profundidad parece una escalera, y es llamada “escalera termohalina”. Schmitt *et al.* (1987) observaron escalones de 5-30m de espesor en la región tropical oeste del Atlántico Norte, que ocupaban una extensión de 200-400 km y duraron al menos 8 meses.

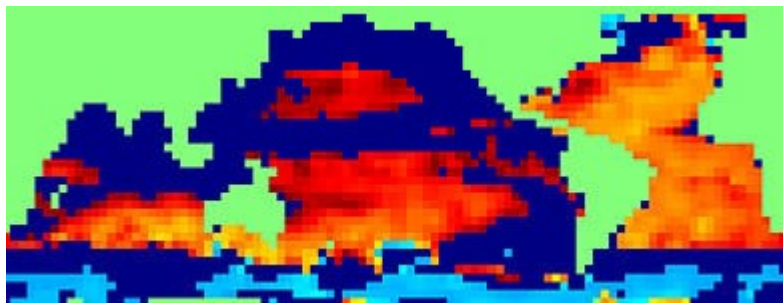


Figura 3.5 - Regiones donde ocurre la formación de dedos de sal.

La doble-difusión mezcla agua de mar y no puede ser ignorada. Experimentos con modelos de circulación general oceánica que incluyen este proceso encontraron que la mezcla debido a la formación de dedos de sal cambia los patrones regionales de temperatura y salinidad. No obstante,

se encontró también que este proceso tiene relativamente poca influencia en la circulación oceánica de gran escala.

3.5 Ecuación de conservación de momento

Para expresar la 2da Ley de Newton para el océano es necesario aplicarla sobre un elemento de fluido de densidad dada, determinar cuáles son las fuerzas actuando sobre el elemento y considerar que la Tierra rota. Las ecuaciones resultantes describirán las corrientes, mareas, ondas, turbulencia y toda otra forma de movimiento en los océanos.

Veremos que estas son ecuaciones en derivadas parciales no lineales, por lo que no existe para ellas una solución analítica completa. Las ecuaciones deben por lo tanto ser resueltas numéricamente. En el curso consideraremos soluciones parciales que muestran las fuerzas y procesos actuantes en casos particulares.

Las fuerzas que actúan sobre una parcela de agua en el océano son:

1. Gravedad: es la fuerza dominante. El peso del agua induce la presión en profundidad.
2. Empuje: es la fuerza de gravedad que actúa sobre una parcela de agua que es más o menos densa que el agua al mismo nivel. Por ejemplo, aire frío soplando sobre el océano enfría las aguas en superficie aumentando su densidad y volviéndolas más densas que el agua subsuperficial. La gravedad actuando sobre la diferencia de densidad resulta en una fuerza que causa que el agua se hunda.
3. Gradientes horizontales de presión: son debidos al diferente peso del agua en diferentes regiones de los océanos, para el mismo nivel.
4. Fricción. El esfuerzo del viento es resultado de la fricción con la superficie. El esfuerzo transfiere momento al mar, creando las corrientes. A su vez, viento soplando sobre ondas de superficie induce un gradiente de presión horizontal sobre las ondas transfiriéndoles energía y haciéndolas crecer.
5. Fuerzas aparentes que aparecen debido a que las ecuaciones se escriben para movimientos inerciales en un sistema de coordenadas que rota. De acuerdo a la 1a ley de Newton no debería existir cambio en el movimiento si la fuerza neta actuante es zero. No obstante, un cuerpo moviéndose a velocidad constante parece cambiar de dirección (y por lo tanto sufre una aceleración) cuando es visto desde un sistema de coordenadas que rota. El cambio de dirección es atribuido a la aceleración de Coriolis.

Escribiendo la 2a ley de Newton para una parcela de agua se obtiene la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{u} + \mathbf{g} + \mathbf{F}_r \quad (3.19)$$

donde la aceleración resulta de la suma de las fuerzas: gradiente de presión, Coriolis, gravedad y fricción. $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de rotación terrestre.

En coordenadas cartesianas (figura 3.6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi + F_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\Omega u \sin \varphi + F_y \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g + F_z \end{aligned} \tag{3.20}$$

Se asume que $w \ll (u,v)$, entonces se desprecia el termino $2\Omega w \cos \varphi$ en la ecuacion para u. A su vez, el termino $2\Omega u \cos \varphi$ es pequeño comparado con la gravedad y tambien se puede despreciar en la ecuación para la direcciión vertical. Las F denotan términos de fricción.

Recordemos que la aceleración de una parcela de agua tiene dos componentes:

- la aceleración local: $\frac{\partial}{\partial t}$,
- la advección: $u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$, que es el cambio en la velocidad debido al movimiento del fluido (u,v,w).

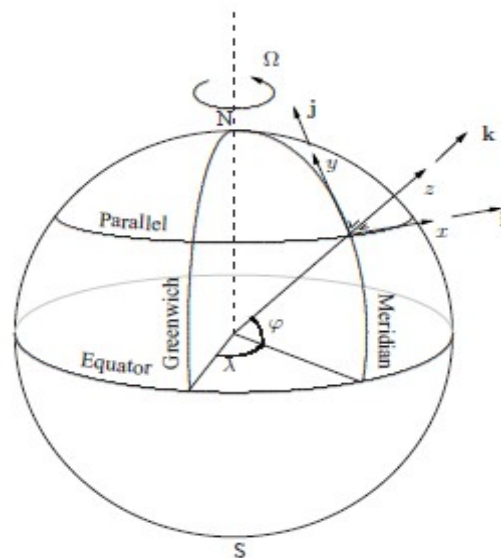


Figura 3.6 – Sistema de coordenadas

3.5.1 Fuerza de presión

En ausencia de otras fuerzas una parcela se moverá de mayor presión a menor presión y la aceleración será proporcional al gradiente de presión.

Para derivar la expresión de la fuerza de presión consideremos las fuerzas actuando sobre un elemento de volumen como muestra la figura 3.7

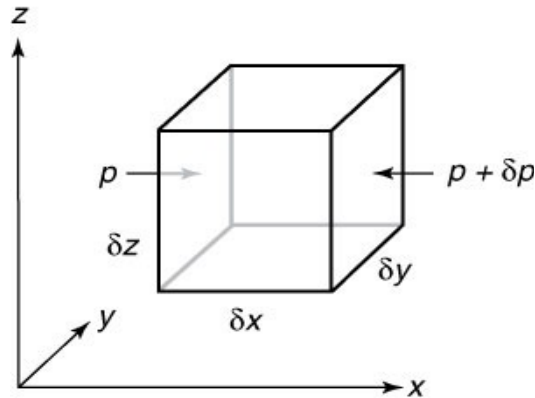


Figura 3.7 – Fuerza de presión actuando sobre un elemento de volumen.

La fuerza neta en la dirección x es:

$$\delta F_x = p \delta y \delta z - (p + \delta p) \delta y \delta z = -\delta p \delta y \delta z$$

Pero, si la presión varía en forma continua,

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial x} \delta x$$

y por lo tanto

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta V$$

Para hallar la aceleración dividimos entre la densidad

$$a_x = \frac{\delta F_x}{\delta m} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta V}{\delta m}$$

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Análogamente en las otras direcciones, por lo que se puede escribir

$$a_{GP} = \frac{-1}{\rho} \nabla p \quad (3.21)$$

Gradientes de presión en el océano ocurren por diferentes razones. Causas principales son las variaciones de densidad y la existencia de una pendiente en la superficie del agua.

3.5.2 Aceleración de Coriolis

La aceleración de una parcela de fluido en un sistema de coordenadas que rota (Ω) es

$$a_{fijo} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}_{fijo} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}_{rotante} + 2\Omega \times \mathbf{u} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) \quad (3.22)$$

donde \mathbf{R} es el vector distancia al centro de la Tierra, y \mathbf{u} es la velocidad de la parcela en un sistema de coordenadas fijo en la Tierra. El término $2\Omega \times \mathbf{u}$ es la aceleración de Coriolis, mientras que el $\Omega \times \Omega \times \mathbf{R}$ es la aceleración centrífuga.

La derivación de la aceleración de Coriolis no será hecha aquí. No obstante, para ganar cierta intuición sobre el proceso consideremos la aceleración centrífuga de una parcela en reposo sobre la superficie terrestre. Dado que la Tierra rota con velocidad angular Ω la aceleración centrífuga será $\frac{U^2}{q} = \Omega^2 q$ ya que $U = \Omega q$ donde q es la distancia al eje de rotación ($q = R \cos \theta$). Si ahora la parcela se mueve hacia el este con una velocidad u la aceleración centrífuga total será

$$\frac{(U+u)^2}{q} = \frac{U^2}{q} + \frac{2Uu}{q} + \frac{u^2}{q} = \Omega^2 q + 2\Omega u + \frac{u^2}{q} \quad (3.23)$$

Dado que U es al menos 100 veces mayor que cualquier corriente oceánica de velocidad u el último término puede ser despreciado. El primer término es la aceleración centrífuga debido a la rotación terrestre y el segundo término es la aceleración de Coriolis.

De acuerdo a la figura 3.8 la aceleración de Coriolis puede ser descompuesta en dos componentes. La componente paralela a la superficie terrestre tiene valor $2\Omega u \sin \theta$ y es la componente horizontal de la fuerza de Coriolis que aparece debido a movimientos en la dirección x (pero que genera movimientos en la dirección y , ver ecuación 3.20). La componente vertical de la aceleración de Coriolis puede ser ignorada en casi todos los problemas oceanográficos.

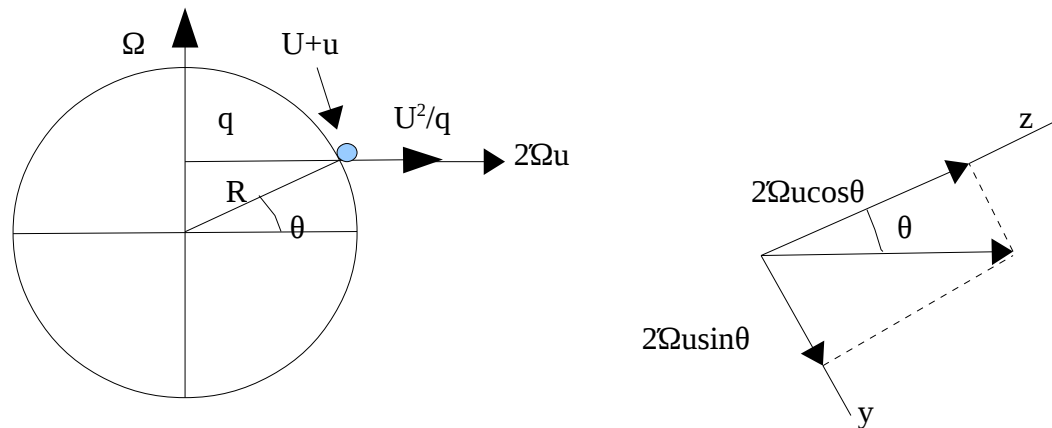


Figura 3.8 - Una parcela con velocidad relativa u en la dirección x sufre una aceleración centrífuga adicional que tiene dos componentes: una en la dirección vertical local y otra en la dirección meridional.

3.5.3 Aceleración gravitatoria

La aceleración gravitatoria por unidad de masa es

$$\frac{\mathbf{F}_g}{m} = \mathbf{g}_f = \frac{GM_E}{R^2}$$

donde G es la constante gravitatoria y M_E es la masa de la Tierra.

En ausencia de rotación las fuerzas gravitacionales mantienen la materia unida formando un cuerpo esférico con el material más denso en el centro. Debido a la rotación, la fuerza centrífuga causa una fuerza hacia afuera del eje de rotación distorsionando el equilibrio esférico y el planeta asume una forma achatada en los polos. La fuerza resultante de las fuerzas de gravedad y centrífuga tiene una dirección que apunta a la vertical local (ver figura 3.9).

La distorsión causada por la fuerza centrífuga es muy pequeña: el radio terrestre es de 6378 km en el ecuador y 6351 km en los polos.

Por simplicidad llamaremos fuerza gravitacional a la resultante de la fuerza gravitatoria y centrífuga

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_f - \Omega \times (\Omega \times \mathbf{R}) \tag{3.24}$$

(Notemos que debido a inhomogeneidades en la distribución de rocas y magma la verdadera fuerza gravitacional no está dirigida hacia el centro de la Tierra.) La superficie que se obtiene se llama un geoide y puede ser interpretado como la superficie de un océano en reposo. Esta superficie “virtual” es perpendicular en todo punto a la dirección de la gravedad (neta) y forma una superficie equipotencial, o sea que una parcela moviéndose en esa superficie no sufre cambios en la energía potencial.

El valor de la energía potencial por unidad de masa se llama geopotencial y el geoide es por lo tanto una superficie de geopotencial constante. Esta superficie es la referencia para calcular elevaciones en la topografía, en el nivel del mar y profundidad oceánica. Las desviaciones de la superficie oceánica con respecto al geoide son el resultado de las fuerzas que determinan las corrientes oceánicas en superficie. Las pendientes en la superficie oceánica necesarias para mantener las mayores corrientes son como máximo del orden de 10^{-5} y en ningún lugar del océano las desviaciones con respecto al geoide son mayores a 2 m.

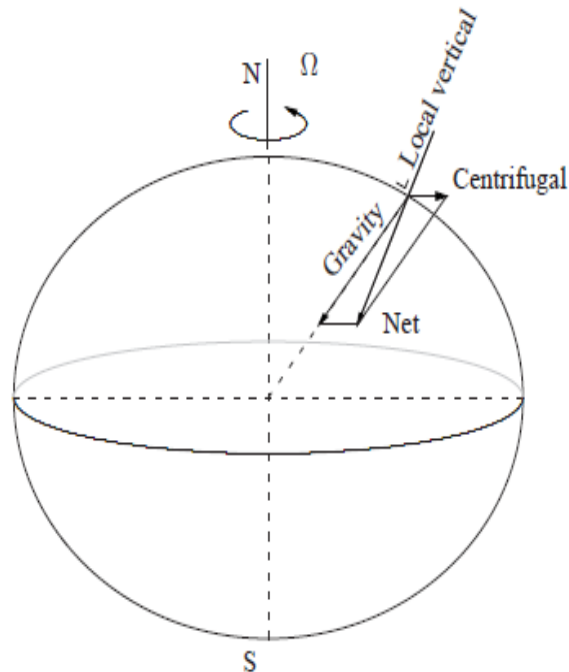


Figura 3.9 – Fuerza gravitatoria neta resultante de la fuerza gravitatoria y la centrífuga.

3.5.4 Fricción

Las fuerzas de fricción permiten al viento soplando en la superficie generar olas y corrientes, proveen un mecanismo para el intercambio de energía cinética entre parcelas de agua adyacentes y convierten energía cinética del océano en calor.

Fluidos ideales no tienen viscosidad a nivel molecular. El viento de una atmósfera ideal soplando

sobre un océano ideal no tendría efecto y no generaría olas ni corrientes. En el mundo real el esfuerzo de los vientos aplicado sobre la superficie oceánica moverá el océano en superficie y el esfuerzo será a su vez transmitido hacia mayores profundidades. Si el viento se detiene el agua se desacelerará y se detendrá cuando toda la energía cinética haya sido convertida en calor.

La viscosidad molecular dinámica del agua es $\mu = 1 \times 10^{-3} \text{ kg/m/s}$ y la viscosidad cinemática $\nu = \frac{\mu}{\rho} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Conociendo la viscosidad es posible calcular la razón de transferencia de momento, que para un fluido Newtoniano, como el océano, tiene la forma (figura 3.10)

$$\tau = \mu \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \tag{3.25}$$

o sea que el esfuerzo viscoso en cada punto es proporcional al cortante de velocidades local.

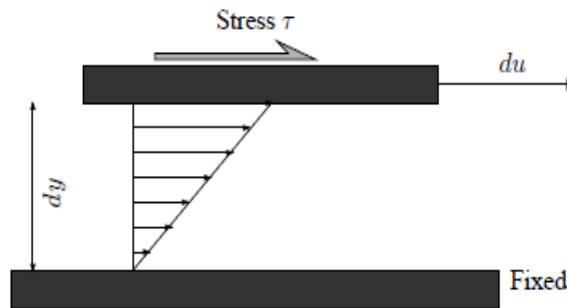


Figura 3.10 – Relación entre esfuerzo y gradiente de velocidades para un fluido newtoniano.

La derivación del termino de fricción es análoga al de la fuerza de presión. Consideremos la figura 3.11 donde se tiene un elemento de volumen sobre el cual se le aplica un esfuerzo cortante en las caras inferior y superior

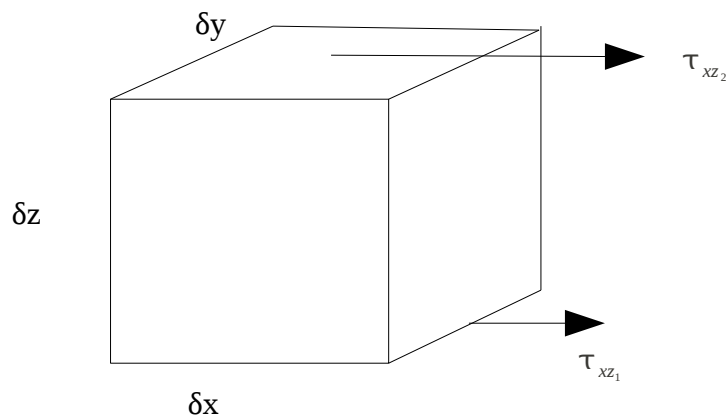


Figura 3.11 – Esfuerzo tangencial actuando sobre un elemento de volumen.

La fuerza aplicada sobre el cubo es la diferencia entre los esfuerzos, o sea

$$\begin{aligned}
 (\rho \delta x \delta y \delta z) \frac{du}{dt} &= \tau_{xz_2} (\delta x \delta y) - \tau_{xz_1} (\delta x \delta y) \\
 \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{(\tau_{xz_2} - \tau_{xz_1})}{\delta z} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z}
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

El primer subíndice de τ indica la dirección sobre la cual actúa el esfuerzo cortante y el segundo subíndice indica el plano sobre el cual actúa el esfuerzo.

En el límite a medida que el volumen tiende a 0, vale

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\mu \frac{\partial u}{\partial z}) = \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}
 \tag{3.27}$$

donde se consideró un valor constante para la viscosidad dinámica.

En forma análoga es posible derivar los otros términos de esfuerzo (normales y cortantes) y se puede escribir

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dt} &= \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
 \frac{dv}{dt} &= \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\
 \frac{dw}{dt} &= \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
 \frac{d\vec{V}}{dt} &= \nu \nabla^2 \vec{V}
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Los mayores valores de cortante de velocidades observados en el océano son del orden de 5×10^{-2} 1/s, por lo que no es esperable que la viscosidad molecular juegue un papel importante en las ecuaciones de movimiento de los océanos. Esto es consistente con el hecho de que el proceso de transferencia molecular de energía cinética y momento es mucho menor que el medido en el océano. Así, al igual que en los casos de la sal y el calor, es necesario considerar los movimientos turbulentos que mezclan las aguas con diferente energía cinética y permiten acelerar la transferencia de momento. Si bien la transferencia final es realizada por procesos moleculares, la mezcla realizada por la turbulencia permite que el proceso se realice más rápidamente al incrementar el número de interfases y los gradientes a través de los cuales ocurrirá la difusión molecular (Figura 3.12).

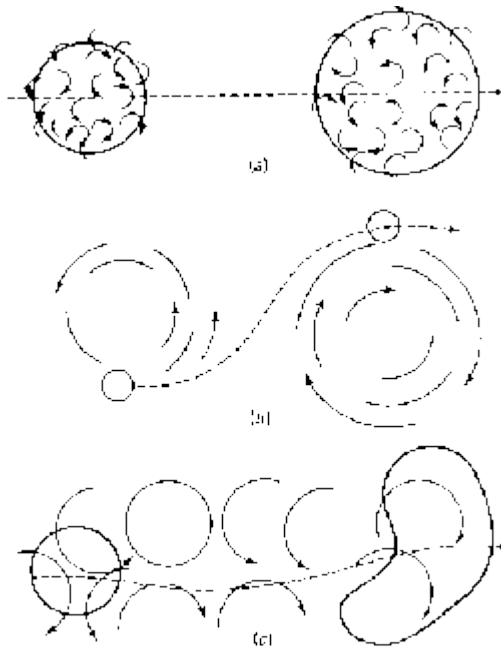


Figure 9: Scales of turbulence. (Seinfeld, 1986)

Figura 3.12 – Escalas de turbulencia.

Por lo tanto, de la misma forma que se hizo para la ecuación de conservación de sal y de calor, se define una viscosidad turbulenta de coeficientes constantes.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu_E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{dv}{dt} &= A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \nu_E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Notar que mientras el coeficiente de viscosidad turbulenta en la dirección horizontal es la misma para transferencias de momento y calor (A), los coeficientes en la dirección vertical son diferentes.

3.6 Aproximación de Boussinesq

El promedio de temperatura y salinidad en los océanos es $T=4\text{ }^\circ\text{C}$, y $S=34.7$, lo cual corresponde a una densidad de 1028 kg/m^3 a presión de superficie. Variaciones en la densidad en una cuenca oceánica muy raramente exceden 3 kg/m^3 . Aún en los estuarios como el Río de la Plata donde el agua dulce de los ríos ($S=0$) se mezcla con agua de mar ($S=34.7$) la diferencia de densidades relativas es solo de 3%. Por lo tanto, es posible en la mayoría de los casos asumir que la densidad

del océano no se aleja mucho de un valor de referencia; entonces:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z, t) \quad |\rho'| \ll \rho_0 \quad (3.30)$$

donde la variación en ρ' está causada por la estratificación o por los movimientos del fluido.

La aproximación de Boussinesq consiste en sustituir ρ por ρ_0 en todas las ecuaciones de conservación excepto donde está multiplicada por g . Este procedimiento simplifica las ecuaciones enormemente.

Para considerar esta aproximación se debe cumplir lo siguiente:

- las velocidades en el océano deben ser mucho menores que la velocidad del sonido c . Esto asegura que la velocidad no cambie la densidad.
- la velocidad de fase de las ondas debe ser menor a c . La velocidad del sonido en fluidos incompresibles es infinita, por lo que esta aproximación no es válida para las ondas de sonido (las filtra).
- La escala vertical del movimiento debe ser menor a c^2/g . Esto asegura que a medida que la presión aumenta con la profundidad, el incremento en la presión solo produce pequeños aumentos en la densidad.

Estas aproximaciones son válidas en el océano, lo cual asegura que los flujos oceánicos pueden considerarse incompresibles.

La aproximación de la ecuación de momento vertical requiere más cuidado ya que la densidad está multiplicando g , y este término representa el peso del fluido que sabemos aumenta la presión con la profundidad. Si p_0 es la parte de la densidad asociada a la presión hidrostática p_0

$$p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$$

con

$$p_0(z) = P_0 - \rho_0 g z,$$

de tal forma que $dp_0/dz = -\rho_0 g$ la ecuación de momento vertical queda

$$\frac{dw}{dt} = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - g \frac{\rho'}{\rho_0} + \nu \nabla^2 w \quad (3.31)$$

El término gp' es responsable del empuje, fundamental para la comprensión de la dinámica del océano.

Notar que es posible sustituir p' por p en las ecuaciones de momento horizontales ya que p_0 no depende de x o y .

3.7 Ecuación para la densidad

Combinando las ecuaciones de conservación para la salinidad y la energía

$$\rho_0 c_v \frac{dT}{dt} = A \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.32)$$

$$\frac{dS}{dt} = A \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \quad (3.33)$$

y usando la ecuación de estado lineal (1.5), despreciando la dependencia con la presión, queda

$$\frac{d\rho'}{dt} = A \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2} \quad (3.34)$$

Notar que las variables originales p y ρ ya no aparecen en las ecuaciones, y por lo tanto dejaremos las primas (') de lado. De ahora en más los valores de p y ρ representarán perturbaciones de densidad y de presión. La presión de la perturbación es a veces llamada presión dinámica pues es muchas veces una contribuyente fundamental del flujo.

3.8 Sistema completo de ecuaciones

De acuerdo a todo lo anterior, el sistema de ecuaciones a resolver para describir los movimientos oceánicos es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= fv - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + A \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + A \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v_E \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\rho}{\rho_0} + A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + v_E \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= A \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} \right) + \kappa_E \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde se quitaron las primas (') de p' y ρ' . Las incógnitas son u, v, w, p y ρ . Estas ecuaciones permiten calcular la evolución de los flujos oceánicos siempre y cuando se especifiquen condiciones de borde. Una cuenca oceánica está limitada lateralmente por continentes, y verticalmente por la batimetría y la interface océano-atmósfera. En general las condiciones de borde entonces implican imponer

- velocidad normal a la frontera nula, o sea que el agua no puede atravesar el continente
- velocidad tangencial a la frontera nula, o sea que el agua no desliza.
- Nulo transporte de calor y sal a través de la frontera lateral (a menos que existan ríos).
- Flujos de calor y agua en la superficie.
- La superficie se considera como una superficie material o sea que las partículas de fluido en la frontera tienen la misma velocidad que la frontera, y la presión en superficie es la atmosférica p_a .

En la práctica es muy difícil encontrar soluciones a las ecuaciones primitivas aún para los flujos más simples. Por lo tanto, en el resto del curso simplificaremos las ecuaciones al máximo lo cual nos permitirá encontrar soluciones analíticas sencillas que ilustrarán los principales procesos involucrados. Para caminar en la simplificación de las ecuaciones el primer paso es identificar el orden de magnitud de los términos involucrados.

Los términos de la ecuación de momento horizontal tienen las siguientes escalas

$$\frac{U}{T}, \frac{U^2}{L}, \frac{U^2}{L}, \frac{WU}{H}, \Omega U, \frac{P}{\rho_0 L}, \frac{AU}{L^2}, \frac{\nu_E U}{H^2}.$$

En general la rotación juega un papel fundamental en la dinámica oceánica, por lo que tomamos el término de Coriolis como referencia y comparamos los otros términos con él. Dividiendo entonces entre ΩU

$$\frac{1}{\Omega T}, \frac{U}{\Omega L}, \frac{U}{\Omega L}, \frac{WL}{UH} \cdot \frac{U}{\Omega L}, 1, \frac{P}{\rho_0 \Omega L U}, \frac{A}{\Omega L^2}, \frac{\nu_E}{\Omega H^2}.$$

Se definen los siguientes números adimensionados que caracterizan diferentes propiedades del flujo.

Número de Rossby temporal: $Ro_T = \frac{1}{\Omega T}$ compara la escala temporal del movimiento con la razón de rotación terrestre (Coriolis).

Número de Rossby $Ro = \frac{U}{\Omega L}$ compara la advección con Coriolis, y es fundamental en el estudio de los fluidos geofísicos en general. Los movimientos oceánicos son muy diferentes dependiendo de Ro .

El cuarto término es del orden de Ro multiplicado por WL/UH que se verá más adelante es a su vez del orden de Ro .

Número de Ekman $E_k = \frac{\nu_E}{\Omega H^2}$ mide la importancia de la disipación turbulenta vertical con

respecto de Coriolis. Este numero es muy pequeño en la mayoría de las situaciones, del orden de 10^{-2} - 10^{-6} dependiendo del valor del coeficiente de viscosidad usado. Así, parecería lógico despreciar los términos de fricción. No obstante estos términos deben retenerse ya que juegan un papel fundamental en la dinámica de la capa límite.

El término $P/\rho_0\Omega LU$ es generalmente de $O(1)$ para movimientos de gran escala oceánicos.

En general los movimientos oceánicos (de gran escala) cumplen $H \ll L$, lo cual por la ecuación de continuidad implica $W \ll U$ y los movimientos son entonces someros y cuasi-bidimensionales. Para la ecuación de momento vertical las escalas son entonces

$$\frac{W}{T}, \frac{UW}{L}, \frac{UW}{L}, \frac{W^2}{H}, \frac{P}{\rho_0 H}, \frac{g\Delta\rho}{\rho_0}, \frac{AW}{L^2}, \frac{AW}{L^2}, \frac{\nu_E W}{H^2}.$$

Se tiene que $W/T < W\Omega \ll U\Omega$; además $UW/L < W\Omega \ll U\Omega$; y $WW/H < WU/L$.

A su vez,

$$\frac{\Omega U}{\frac{P}{\rho_0 H}} = \frac{\Omega U H \rho_0}{P} \sim \frac{H}{L} \ll 1 \tag{3.36}$$

Entonces los cuatro primeros términos son mucho más chicos que el quinto. A su vez, los términos de viscosidad turbulenta son muy pequeños. Por lo tanto, el balance de momento vertical se reduce al balance hidrostático

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{g\rho}{\rho_0}. \tag{3.37}$$

Como la presión p ya es una perturbación con respecto a una presión mucho mayor en equilibrio hidrostático, es posible concluir que los flujos oceánicos estarán siempre muy cerca del equilibrio hidrostático aún en presencia de movimientos intensos. Esta aproximación deja de valer, por ejemplo, en sitios de formación de aguas profundas en el Atlántico norte, y en este caso el balance de momento vertical ocurre entre la aceleración vertical, el gradiente de presión y el empuje.

Por último es posible comparar los dos términos de la ecuación hidrostática (3.37), que escalan como P/H y $g\Delta\rho$

$$\frac{gH \Delta \rho}{P} = \frac{gH \Delta \rho}{\rho_0 \Omega L U} = \frac{U}{\Omega L} \cdot \frac{gH \Delta \rho}{\rho_0 U^2} = R_o \cdot \frac{gH \Delta \rho}{\rho_0 U^2} .$$

lo cual permite definir el número de Richardson

$$Ri = \frac{gH \Delta \rho}{\rho_0 U^2}$$

El número de Richardson mide la importancia de la estratificación en el movimiento del océano: para valores < 1 los efectos de la estratificación son despreciables, mientras que para valores $\gg 1$ la estratificación domina la dinámica oceánica.

En general el número de Richardson se puede expresar en función de la frecuencia de Brunt-Vaisala N

$$Ri = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}$$

y mide la importancia relativa de la estabilidad estática contra la estabilidad dinámica caracterizada por gradientes de velocidad.

3.9 Esfuerzos de Reynolds

Los coeficientes turbulentos de transferencia se introdujeron en forma empírica. La formulación más satisfactoria para introducir los coeficientes turbulentos de transferencia de energía cinética, calor o salinidad (A, ν_E, κ_E) es en términos de los esfuerzos de Reynolds. En esta sección repasaremos el formalismo.

La turbulencia en los océanos proviene, matemáticamente, de los términos no lineales en las ecuaciones de momento. Su importancia está caracterizada por un número adimensional, el número de Reynolds Re que es el cociente entre los términos no lineales y el término viscoso

$$Re = \frac{u \frac{\partial u}{\partial x}}{\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \sim \frac{UU/L}{\nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.38)$$

donde U es una velocidad típica del flujo y L es una escala espacial que lo describe. Por ejemplo, valores típicos del océano lejos de las fronteras son $U=0.1$ m/s, $L=10^4$ m, $\nu=10^{-6}$ m²/s, por lo que $Re=10^9 \gg 10-1000$, valores para los cuales el término no lineal se vuelve importante.

Los procesos oceánicos ocurren en muchas escalas de tiempo y espacio (ver Figura 3.13)

Si estamos interesados en el flujo de gran escala promediado sobre un tiempo determinado es posible derivar ecuaciones para el flujo medio incluyendo un término nuevo que describe el efecto de la turbulencia de la pequeña escala en escalas mayores.

Siguiendo Reynolds (1894), descomponemos la evolución de cada variable en la media y una fluctuación

$$u = \langle u \rangle + u', \tag{3.39}$$

tal que $\langle u' \rangle = 0$ por definición.

Existen varias formas de tomar el promedio, algunas mas rigurosas que otras. Aquí consideraremos que la media es un promedio temporal sobre un intervalo de tiempo suficientemente largo para obtener una media estadísticamente significativa, y suficientemente corto como para retener la evolución lenta del flujo de interes.

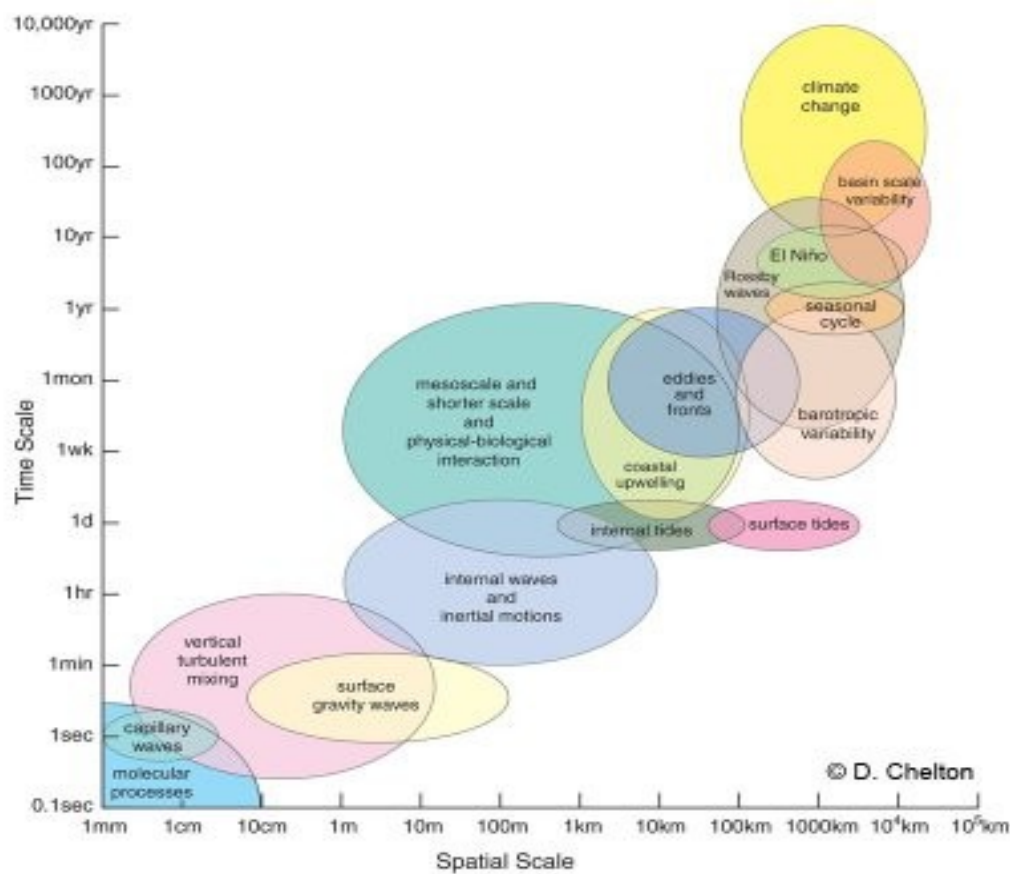


Figura 3.13 – Escalas de procesos oceánicos

Notar que la media de un producto queda

$$\langle uv \rangle = \langle (\langle u \rangle + u') \rangle \langle (\langle v \rangle + v') \rangle = \langle \langle u \rangle \langle v \rangle \rangle + \langle \langle u \rangle v' \rangle + \langle \langle v \rangle u' \rangle + \langle u' v' \rangle = \langle u \rangle \langle v \rangle + \langle u' v' \rangle \quad (3.40)$$

Considerando la ecuación de momento en la dirección x

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - f \langle v \rangle + \langle u' \frac{\partial u'}{\partial x} \rangle + \langle v' \frac{\partial u'}{\partial y} \rangle + \langle w' \frac{\partial u'}{\partial z} \rangle = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u \rangle \quad (3.41)$$

que se puede escribir

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - f \langle v \rangle = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \nu \nabla^2 \langle u \rangle - \langle \frac{\partial u' u'}{\partial x} \rangle - \langle \frac{\partial u' v'}{\partial y} \rangle - \langle \frac{\partial u' w'}{\partial z} \rangle \quad (3.42)$$

donde se usó la ecuación de continuidad para las fluctuaciones. La ecuación resultante tiene la misma forma que la ecuación original a menos de los tres nuevos términos a la derecha que representan el efecto de las fluctuaciones en el flujo medio. Combinando estos términos con la fricción

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nu \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} - \langle u' u' \rangle), \quad \frac{\partial}{\partial y} (\nu \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial y} - \langle u' v' \rangle), \quad \frac{\partial}{\partial z} (\nu \frac{\partial \langle w \rangle}{\partial z} - \langle u' w' \rangle) \quad (3.43)$$

se observa que los promedios de las fluctuaciones turbulentas de la velocidad actúan como esfuerzos viscosos: esfuerzos de Reynolds.

El efecto mas importante de la turbulencia y otros movimientos a escalas pequeñas (como torbellinos chicos) es la disipación. Por lo tanto, la forma mas simple de representar el efecto de la turbulencia sobre el flujo medio de gran escala es a traves de una “super-viscosidad”. Esto se hace simplemente reemplazando el coeficiente de viscosidad molecular por una viscosidad turbulenta, como hicimos mas arriba. Esta parametrización tan simple, no obstante, reconoce la importante propiedad del flujo oceánico y de otros fluidos geofísicos: la anisotropía del flujo en las direcciones horizontal y vertical. Los movimientos turbulentos cubren distancias más grandes en la horizontal que en la vertical, y los tipos de movimientos son también mas numerosos. Por lo tanto el coeficiente en la horizontal debe ser bastante mayor. Se define entonces el coeficiente de viscosidad turbulenta A para la horizontal y otro ν_E para la vertical y la ecuación de momento

zonal queda

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - f \langle v \rangle = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_E \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} \right)$$

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} + \langle u \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial x} + \langle v \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} + \langle w \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial z} - f \langle v \rangle = \frac{-1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} + A \left(\frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial y^2} \right) + v_E \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial z^2}$$

(3.44)

y ecuaciones análogas para las direcciones y, z. El mismo procedimiento da lugar a los coeficientes turbulentos en las ecuaciones de conservación de sal y calor.

Bibliografía principal

- Introduction to physical oceanography, B. Stewart
- Introduction to geophysical fluid dynamics, B. Cushman-Roisin
- Introduction to physical oceanography, J. Knauss.
- Introduction to the physical and biological oceanography of the shelf seas, J. Simpson and J. Sharples.